福州格致中学 2020-2021 学年第一学期高二数学

选择性必修二校本作业（16）

（范围：数学归纳法的应用　完成时间：40 分钟　命题人：高二数学集备组）

班级：________________姓名：________________座号：________________

A 组:基础型作业

一、选择题

1．用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*，n>1)$时，第一步应验证不等式(　　)

A．$1+\frac{1}{2}<2$　　B．$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$　　C．$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<3$　　D．$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<3$

2．用数学归纳法证明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，则当 $n=k+1$ 时，左端应在 $n=k$ 的基础上加上(　　)

A．$\frac{1}{2k+2}$　　B．$-\frac{1}{2k+2}$　　C．$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$　　D．$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

3．一个与正整数 n 有关的命题，当 $n=2$ 时命题成立，且由 $n=k$ 时命题成立可以推得 $n=k+2$ 时命题也成立，则(　　)

A．该命题对于 $n>2$ 的自然数 n 都成立　　B．该命题对于所有的正偶数都成立

C．该命题何时成立与 k 取值无关　　D．以上答案都不对

4．利用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\geqslant 2，n\in\mathbf{N}^*)$的过程中，由 $n=k$ 变到 $n=k+1$ 时，左边增加了(　　)

A．1 项　　B．k 项　　C．2^{k-1} 项　　D．2^k 项

5．对于不等式$\sqrt{n^2+n}<n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，某同学用数学归纳法证明的过程如下：

(1)当 $n=1$ 时，$\sqrt{1^2+1}<1+1$，不等式成立．

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，不等式$\sqrt{k^2+k}<k+1$成立，当 $n=k+1$ 时，$\sqrt{(k+1)^2+k+1}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{(k^2+3k+2)+(k+2)}=\sqrt{(k+2)^2}=(k+1)+1$

∴当 $n=k+1$ 时，不等式成立，则上述证法(　　)

A．过程全部正确　　B．$n=1$ 验得不正确

C．归纳假设不正确　　D．从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确

二、填空题

6．已知 n 为正偶数，用数学归纳法证明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}=2(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n})$时，若已知假设 $n=k(k\geqslant 2)$为偶数时，命题成立，则还需要用归纳假设再证________．

7．用数学归纳法证明“$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3(n\in\mathbf{N}^*)$能被 9 整除”，要利用归纳假设证 $n=k+1$ 时的情况，只需展开________.

8．已知 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，用数学归纳法证明 $f(2^n)>\frac{n}{2}$时，$f(2^{k+1})-f(2^k)=$________.

三、解答题

9．用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

10．已知正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$．用数学归纳法证明：$a_n<a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

B 组：提高型作业

11．某命题与自然数有关，如果当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时该命题成立，则可推得 $n=k+1$ 时该命题也成立，现已知当 $n=5$ 时该命题不成立，则可推得(　　)

A．当 $n=6$ 时，该命题不成立　　B．当 $n=6$ 时，该命题成立

C．当 $n=4$ 时，该命题不成立　　D．当 $n=4$ 时，该命题成立

12．(**多选题**)用数学归纳法证明不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$的过程中，下列说法正确的是(　　)

A．使不等式成立的第一个自然数 $n_0=1$　　B．使不等式成立的第一个自然数 $n_0=2$

C．$n=k$ 推导 $n=k+1$ 时，不等式的左边增加的式子是$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$

D．$n=k$ 推导 $n=k+1$ 时，不等式的左边增加的式子是$\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}$

13．已知 n 为正偶数，用数学归纳法证明“$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$”时，第一步的验证为________；若已假设 $n=k$($k\geqslant 2$ 且 k 为偶数)时等式成立，则还需要用归纳假设证 $n=$________时等式成立．

14．记凸 k 边形的内角和为 $f(k)$，则凸 $k+1$ 边形的内角和 $f(k+1)=f(k)+$________．

C 组：发展型作业

15．是否存在 a，b，c 使等式 $\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{an^2+bn+c}{n}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立？若不存在，说明理由；若存在，用数学归纳法证明你的结论．